



Sur la géométrie des structures de contact en dimension trois : stabilité, flexibilité et finitude

Vincent Colin

► To cite this version:

Vincent Colin. Sur la géométrie des structures de contact en dimension trois : stabilité, flexibilité et finitude. Mathématiques [math]. Université de Nantes, 2002. tel-00002138

HAL Id: tel-00002138

<https://theses.hal.science/tel-00002138>

Submitted on 16 Dec 2002

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SUR LA GÉOMÉTRIE DES STRUCTURES DE CONTACT EN DIMENSION
TROIS : STABILITÉ, FLEXIBILITÉ ET FINITUDE

Vincent COLIN

Laboratoire de mathématiques Jean Leray, UMR 6629 du CNRS
Université de Nantes

Document de synthèse – Habilitation à diriger des Recherches

NANTES — Mai 2002

SUR LA GÉOMÉTRIE DES STRUCTURES DE CONTACT EN DIMENSION TROIS

VINCENT COLIN

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	3
2. Définitions et outils	4
2.1. Structures vrillées <i>vs</i> Structures tendues	4
2.2. Feuilletage caractéristique – Convexité	5
2.3. Rocades	6
2.4. Classification des structures de contact tendues sur la boule	7
3. Stabilité topologique en dimension trois	7
4. Chirurgies de variétés de contact tendues	7
4.1. Chirurgies d'indice un	8
4.2. Collages le long de tores incompressibles	11
4.3. Le cas à bord	12
4.4. Chirurgies de Dehn admissibles	12
5. Constructions de variétés de contact tendues	15
5.1. Collages et hiérarchies	15
5.2. Cas des variétés toroïdales – Liens avec les feuilletages sans composante de Reeb	16
6. Le théorème de classification	17
6.1. Cas des variétés toroïdales – Torsion	19
6.2. Finitude homotopique et isotopique	21
Références	28

1. INTRODUCTION

En dimension trois, exactement deux types de champs de plans $\xi = \ker \alpha$ sont localement homogènes. Le champ de plans ξ est une *structure de contact* lorsque $\alpha \wedge d\alpha$ est une forme volume, et s'intègre en un *feuilletage* lorsque $\alpha \wedge d\alpha$ est identiquement nulle. Conséquence de l'homogénéité, l'étude de ces objets doit refléter, et on l'espère révéler, la géométrie globale de la variété ambiante V . Dans cette optique, les feuilletages ont pris sur les structures de contact une longueur d'avance. Les travaux de D. Gabai [Ga1, Ga2, Ga3], par exemple, ont déjà donné leurs fruits topologiques : preuve de la propriété R pour les nœuds non triviaux de S^3 , critère d'incompressibilité des surfaces...

Date: Mai 2002.

Depuis maintenant une vingtaine d'années, initiée par les travaux de D. Bennequin [Be] et de Y. Eliashberg [El1, El2], l'étude des structures de contact comble son retard. Des liens étroits sont apparus avec la topologie symplectique de dimension 4 [El3, Gro], les invariants de Seiberg-Witten [KM, Wi], la théorie des nœuds et, *via* la dynamique des champs de Reeb et l'impulsion donnée par H. Hofer [Hof], la topologie de dimension 3. Les structures de contact présentent en effet un avantage remarquable sur les feuilletages : elles sont extrêmement stables. On montre en particulier que sur une variété *close* (compacte sans bord) de dimension trois, toute structure de contact C^0 -proche d'une structure de contact donnée lui est isotope [Co4]. La classification à difféomorphisme, ou isotopie, près des structures de contact semble donc un projet raisonnable, sujet de ce texte. En bien des points, ces cousins des feuilletages peuvent apparaître comme leur version discrète, dont on peut attendre une plus grande flexibilité, comme par exemple vis-à-vis des chirurgies de Dehn.

On dispose à présent d'une classification complète des structures de contact sur un certain nombre de variétés : la sphère S^3 [El1], les espaces lenticulaires, les fibrés en tores sur le cercle et les fibrés en cercles sur une surface [Gi3, Gi4, Gi5, Ho1, Ho2] sont les exemples les plus marquant.

Ici, on explique comment produire des théorèmes généraux d'existence et de classification d'un type particulier de structures de contact, les structures tendues, qui sont les seules géométriquement intéressantes. On pose les bases d'une théorie de la décomposition des variétés de contact tendues, dont on démontre les principaux théorèmes. On ouvre ainsi la voie, *via* l'utilisation de hiérarchies, à une approche combinatoire de la géométrie de contact. Ces idées ont depuis été reprises avec succès par K. Honda, W. Kazez et G. Matić [HKM1, HKM2, HKM3]. On dégage également le résultat suivant, obtenu en partie en collaboration avec E. Giroux et K. Honda [Co5, Co7, CGH1, CGH2] : une variété de dimension trois orientable, close et irréductible porte une infinité de structures de contact tendues si et seulement si elle est *toroïdale* (contient un tore π_1 -injecté). Dans tous les cas, les structures tendues n'habitent qu'un nombre fini de classes d'homotopie de champs de plans [CGH1, CGH2] ; c'est alors aussi le cas des feuilletages sans composante de Reeb [CGH1, CGH2, Co8, Ga4].

Je remercie vivement mes co-auteurs, Emmanuel Giroux et Ko Honda ; notre travail en commun leur doit beaucoup.

2. DÉFINITIONS ET OUTILS

Dans la suite, on considère uniquement des variétés orientées, munies de structures de contact positives : $\alpha \wedge d\alpha > 0$. On note $\overline{A \setminus B}$ la complétion métrique de $A \setminus B$ pour la restriction à $A \setminus B$ d'une métrique complète de A .

2.1. Structures vrillées *vs* Structures tendues.

Toute variété orientée et close porte une structure de contact positive [Ma]. Cependant, comme leur pendants intégrables, les structures de contact ont besoin d'une propriété supplémentaire pour devenir sensibles à la géométrie de la variété ambiante.

Une variété de contact (V, ξ) est *tendue* (“*tight*”) si aucun disque D plongé dans V ne vérifie :

$$\xi|_{\partial D} = T_{\partial D} D (*).$$

Les structures non tendues sont dites *vrillées* (“*overtwisted*”), de même que tout disque satisfaisant (*).

Les disques vrillés jouent un rôle similaire à celui des cycles évanescents dans le monde des feuilletages. On peut ainsi, suivant les travaux de W. Thurston et Y. Eliashberg [ET], relier l’étude des structures de contact tendues à celle des feuilletages sans composante de Reeb. On développera ce parallèle dans la section 5.2.

Si le rappel dans tout revêtement de V d’une structure vrillée est encore une structure vrillée, ce n’est pas toujours le cas des structures tendues. C’est pourquoi on considère comme sous-catégorie de ces dernières les structures *universellement tendues*, dont le relèvement au revêtement universel de V reste tendu.

Les structures vrillées ont été complètement classifiées par Y. Eliashberg [El2] : toute classe d’homotopie de champ de plans contient une unique structure vrillée (à isotopie près). C’est pourquoi, dans la suite du texte, on se concentre sur l’étude des structures de contact tendues.

2.2. Feuilletage caractéristique – Convexité.

Le principal moyen d’étude des variétés de contact est la théorie des surfaces convexes, développée par E. Giroux [Gil].

Soit S une surface orientée, plongée dans une variété de contact (V, ξ) . On suppose que S est close, ou compacte à bord *legendrien* (c’est-à-dire tangent à ξ en tout point). Le feuilletage caractéristique ξS de S est le feuilletage singulier obtenu en intégrant le champ de droites singulier $\xi \cap TS$. Il est dirigé par les orientations de ξ et de S , et est singulier aux points où $\xi = TS$. Les singularités de ce feuilletage sont génériquement isolées et de deux types : elliptiques d’indice 1 et hyperboliques d’indice -1 . Elles sont positives (ou négatives) si les orientations de ξ et de TS coïncident (ou non). Le germe d’une structure ξ près d’une surface S est déterminé complètement par le feuilletage caractéristique ξS .

Une surface S est dite *convexe* si elle est transversale à un champ de vecteurs dont le flot préserve ξ (un *champ de contact*). De façon surprenante, la convexité est une propriété générique [Gil] : toute surface close peut-être C^∞ -perturbée en une surface convexe. De plus, la convexité peut se lire sur le feuilletage caractéristique ξS . Par exemple, si ξS est de type Morse-Smale, S est convexe.

Soit γ une courbe legendrienne dans une surface S orientée. On définit l’*invariant de Thurston-Bennequin* $tb(\gamma, S)$ de γ relatif à S comme la moitié du nombre d’intersections, comptées algébriquement, entre ξ et TS le long de γ . Dans le cas où $\gamma = \partial S$ est connexe, ce nombre ne dépend pas de la surface S orientable bordant γ .

De façon similaire, soit γ une courbe connexe positivement transversale à une structure coorientée ξ . On suppose que γ borde, comme variété orientée, une surface orientée S , et on note X une section non singulière de $\xi|_S$. Si γ_ϵ est une courbe obtenue en poussant légèrement γ par X , on définit l’*autoenlacement* $l(\gamma)$ de γ comme l’enlacement entre γ et γ_ϵ .

Si S est une surface de bord legendrien γ dont l'invariant de Thurston-Bennequin relatif est inférieur ou égal à 0 pour chaque composante de γ , alors S peut-être rendue convexe par une isotopie relative à γ , C^0 -petite dans un voisinage de γ et C^∞ -petite en dehors.

Soit S une surface convexe et X un champ de contact transversal à S . On note :

$$\Gamma_S = \{x \in S \mid X(x) \in \xi\},$$

la courbe de *découpage* (ou de *séparation*) de S . C'est une multi-courbe lisse plongée dans S . Elle est transversale à ξS , et sa classe d'isotopie parmi les courbes transversales à ξS est indépendante de X [Gi1]. Elle possède une orientation naturelle, déduite de celle de ξS . On dit qu'un feuilletage \mathcal{F} de S est *adapté* à une multi-courbe Γ , ou encore qu'il est *scindé* par Γ , s'il existe un germe de structure de contact ξ près de S et un champ de contact X transversal à S tels que $\mathcal{F} = \xi S$ et $\Gamma = \Gamma_S$.

La multi-courbe Γ_S capture l'essentiel de l'information sur ξ près de S .

Théorème 2.1. (*Théorème de Flexibilité, E. Giroux [Gi1]*) Soient S une surface close, $f_0 : S \rightarrow (V, \xi)$, $g : S \rightarrow (V', \xi')$ deux plongements d'images convexes et X un champ de contact transversal à $f_0(S)$. Si les multi-courbes orientées $f_0^{-1}(\xi f_0(S))$ et $g^{-1}(\xi' g(S))$ coïncident, alors il existe une isotopie $(f_t)_{t \in [0,1]}$ de f_0 transversale à X telle que $f_1^*(\xi f_1(S)) = g^*(\xi' g(S))$. Cette conclusion vaut également si ∂S est non vide et legendrien et si les feuilletages caractéristiques coïncident déjà près de ∂S . On obtient alors une isotopie relative à ∂S .

Si S est une surface à bord legendrien, un arc δ de Γ_S est dit *parallèle au bord* si une composante de $S \setminus \delta$ est un demi-disque qui ne rencontre pas Γ_S .

2.3. Rocades.

On introduit maintenant le notion de rocade, élaborée dans [Ka], [Et] et [Ho1], qui permet d'investiguer en dehors du voisinage invariant d'une surface convexe.

Soient D un demi-disque plongé dans une variété de contact et $\alpha \cup \beta$ une décomposition de ∂D en deux arcs qui ne se rencontrent qu'en leurs extrémités. Le disque D est une *rocade* ("bypass") s'il possède les propriétés suivantes :

- ∂D est legendrien ;
- D est convexe, sans singularité dans son intérieur ;
- le long de ∂D , il y a deux singularités elliptiques positives en $\partial\alpha = \partial\beta$, une singularité hyperbolique positive dans l'intérieur de β et une singularité elliptique négative dans l'intérieur de α .

L'invariant de Thurston-Bennequin de ∂D est -1 , avec une contribution de 0 de β et une contribution de -1 de α . L'arc β est plus "efficace" que l'arc α .

Lemme 2.2. [Ho1] Soit S une surface convexe à bord legendrien. On suppose qu'il existe une composante parallèle au bord δ de Γ_S qui découpe un demi-disque $D_0 \subset S$. (Si S est un disque, on suppose en plus que Γ_S n'est pas connexe.) Soit D_1 un voisinage tubulaire de D_0 dans S avec $D_1 \cap \Gamma_S = \delta$. On note $\alpha_1 = D_1 \cap \partial S$. Si X est un champ de vecteurs de contact transversal à S , alors il existe une isotopie de S relative à ∂S au travers de surfaces transversales à X , qui conduit à une surface S' transversale à X , telle que l'image de D_1 dans S' par l'isotopie soit une rocade.

L'arc α_1 du lemme joue le rôle de l'arc α dans la définition de rocade. Si S est déjà normalisée près de α_1 , l'isotopie peut-être choisie C^∞ -petite.

Démonstration. On peut dessiner un feuilletage sur S qui est adapté à Γ_S et pour lequel D_1 est une rocade. L'isotopie recherchée est donnée par le Théorème de Flexibilité 2.1. \square

2.4. Classification des structures de contact tendues sur la boule.

Voici un théorème central pour toute cette étude, dû à Y. Eliashberg [El2], qui classe les structures de contact tendues sur le composant élémentaire des variétés de dimension 3 : la boule B^3 .

Théorème 2.3. *Soit Γ une courbe de séparation connexe sur ∂B^3 , et \mathcal{F} un feuilletage adapté à Γ . Il existe une unique structure de contact tendue sur B^3 , à isotopie relative à ∂B^3 près, dont le feuilletage caractéristique sur ∂B^3 est \mathcal{F} .*

3. STABILITÉ TOPOLOGIQUE EN DIMENSION TROIS

Un théorème de Gray [Gra] assure que les structures de contact sont des objets stables pour la topologie C^1 : la condition de contact est ouverte, et, par un lemme à la Moser, tout chemin $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$ de structures de contact est l'image de ξ_0 par une isotopie $(\phi_t)_{t \in [0,1]}$ de V . On obtient un résultat similaire pour la topologie C^0 . Ce théorème fait écho à la fermeture C^0 des difféomorphismes symplectiques dans tous les difféomorphismes [Gro] ; il contribue à affirmer l'existence d'une topologie de contact en dimension 3.

Théorème 3.1. [Co4] *Si (V, ξ) est une variété de contact close, toute structure de contact C^0 -proche de ξ lui est isotope.*

En particulier, ce théorème intègre un fait déjà connu de F. Varela [Va] : deux structures de contact C^0 -proches sont de même signe.

En dimension impaire quelconque, on appelle également structures de contact les champs d'hyperplans ξ complètement non intégrables (pour lesquels $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ est une forme volume). À l'opposé, la condition $\alpha \wedge d\alpha \equiv 0$ impose toujours au champ ξ d'être intégrable.

En dimension $4k+3$, F. Varela [Va] construit, sur tout compact, un exemple d'approximation de la structure positive de \mathbb{R}^{4k+3} par des structures négatives (pour ces dimensions, le signe de $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ ne dépend pas du choix de α et le signe de $\xi = \ker \alpha$ est bien défini). Le théorème 3.1 ne semble donc pas se généraliser en dimension supérieure. La question reste cependant ouverte pour les variétés closes.

4. CHIRURGIES DE VARIÉTÉS DE CONTACT TENDUES

L'objectif poursuivi est la construction de variétés de contact tendues. Pour cela, on montre dans ce chapitre comment le caractère tendu persiste par recollement : la stratégie est de construire des variétés de contact tendues par collages successifs de variétés de contact tendues élémentaires. Ces techniques sont à mettre en perspective avec les résultats de décomposition des variétés de dimension 3 démontrés par Kneser [Kn], Milnor [Mi], Haken [Ha1, Ha2], Jaco [Ja], Johannson [Jo], Shalen [Ja-Sh] et Gabai [Ga1]. On les applique au chapitre suivant pour construire une structure tendue sur toute variété close, *irréductible* (dans laquelle toute sphère plongée borde une boule) et toroïdale. Cette méthode a été

reprise et complétée par K. Honda, W. Kazez et Matić [HKM1, HKM2, HKM3] pour construire de manière directe une structure de contact tendue sur toute variété qui possède une hiérarchie suturée. C'est le cas des variétés closes irréductibles orientables de deuxième groupe d'homologie non nul d'après [Ga1]. À l'inverse, en utilisant le théorème de chirurgie 4.1 (dans une version élémentaire), J. Etnyre et K. Honda [EH1] montrent qu'il existe des variétés qui ne portent aucune structure tendue.

4.1. Chirurgies d'indice un.

Dans cette section, on fournit une construction indépendante de tout remplissage symplectique (voir aussi la proposition 4.8) :

Théorème 4.1. [Co1] *Toute variété obtenue par chirurgie d'indice un sur une variété de contact tendue (par exemple la somme connexe de deux variétés de contact tendues) est naturellement une variété de contact tendue.*

La preuve de ce théorème¹ repose sur une étude des isotopies de sphères qui conduit aussi aux résultats suivants :

Théorème 4.2. [Co1] *Dans une variété de contact tendue, deux plongements isotopes de S^2 qui induisent le même feuilletage caractéristique sont isotopes par la restriction d'une isotopie de contact.*

Théorème 4.3. [Co1] *Dans une variété de contact tendue, deux sphères isotopes ont des complémentaires isomorphes.*

On reproduit une preuve détaillée du théorème 4.1, car c'est la pierre angulaire de tous les résultats de chirurgie qui suivent.

Lemme 4.4. : *Soient (V, ξ) une variété de contact tendue et f_0, f_1 deux plongements de S^2 dans V , d'images S_0, S_1 . Il existe sur $S^2 \times [0, 1]$ une structure de contact tendue η , unique à une isotopie relative au bord près, qui trace sur $S^2 \times \{i\}$, pour $i = 0, 1$, le feuilletage caractéristique induit par f_i . De plus, si les sphères S_0 et S_1 sont convexes dans (V, ξ) , on peut prendre η invariante par un champ de vecteurs Y transversal à tous les niveaux $S^2 \times \{t\}$, $t \in [0, 1]$.*

Démonstration. Soit ζ la structure de contact d'équation $dz + r^2 d\theta = 0$ en coordonnées polaires sur \mathbb{R}^3 et Z le champ de vecteurs $r(\partial/\partial r) + 2z(\partial/\partial z)$ qui la préserve.

Si S_0 et S_1 sont convexes, le théorème de flexibilité 2.1 donne, pour $i = 0, 1$, un plongement $\phi_i : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dont l'image Σ_i est transversale au champ Z et qui induit sur S^2 le même feuilletage caractéristique que f_i . Quitte à pousser ϕ_1 par le flot de Z pendant un temps assez long, on peut supposer que Σ_0 et Σ_1 sont disjointes (et forcément concentriques). On prolonge alors $\phi_0 \sqcup \phi_1$ en un plongement

$$\psi : S^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \phi_i = \psi|_{S^2 \times \{i\}},$$

et on pose $\eta = \psi^* \zeta$, $Y = \psi^* Z$. L'unicité de ζ repose sur la version relative du théorème 2.3 de Y. Eliashberg :

¹Indépendamment, S. Makar-Limanov a proposé dans [ML1] une autre démonstration du théorème 4.1.

Théorème 4.5. *Sur une boule compacte B_1 , deux structures de contact tendues qui tracent le même feuilletage caractéristique sur le bord et qui coïncident sur une boule intérieure B_0 sont isotopes relativement à $\partial B_1 \cup B_0$.*

Étant donné une structure tendue sur $S^2 \times [0, 1]$ qui trace sur le bord le même feuilletage que η , une isotopie relative au bord la modifie en une structure η' qui coïncide avec η sur tout un voisinage du bord. Les structures $\psi_*\eta'$ et ζ se recollent alors pour donner une structure ζ' sur la boule B_1 bordée par Σ_1 dans \mathbb{R}^3 . En prenant pour B_0 la boule bordée par Σ_0 , le théorème 4.5 fournit l'isotopie voulue pour peu que ζ' soit tendue. Or la restriction du champ Z à B_0 s'étend à B_1 en un champ de vecteurs nul au bord qui préserve ζ' . Ce champ permet de pousser hors de B_0 , donc dans l'image de ψ , n'importe quel disque évitant l'origine. Comme $\psi_*\eta'$ est tendue, ζ' l'est aussi.

Si S_i n'est pas convexe, on peut prolonger f_i en un plongement

$$g_i : S^2 \times [i - \epsilon, i + \epsilon] \rightarrow V, \quad f_i = g_i|_{S^2 \times \{i\}},$$

pour lequel les sphères $S_i^\pm = g_i(S^2 \times \{i \pm \epsilon\})$ sont convexes. Il existe alors des plongements $\phi_i^\pm : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ satisfaisant aux conditions suivantes :

- les sphères $\Sigma_i^\pm = \phi_i^\pm(S^2)$ sont transversales à Z ;
- chaque ϕ_i^\pm induit sur S^2 le même feuilletage que $f_i^\pm = g_i|_{S^2 \times \{i \pm \epsilon\}}$;
- les sphères Σ_i^\pm sont disjointes et bordent des boules emboîtées $B_0^- \subset B_0^+ \subset B_1^- \subset B_1^+$.

Compte tenu de l'unicité des structures tendues à bord convexe, on trouve un plongement

$$\psi : S^2 \times [-\epsilon, 1 + \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

qui prolonge les ϕ_i^\pm et vérifie, pour $i = 0, 1$,

$$g_i^*\xi = \psi^*\zeta|_{S^2 \times [i - \epsilon, i + \epsilon]}.$$

On prend alors pour η la restriction de $\psi^*\zeta$ à $S^2 \times [0, 1]$. Si η' est une autre structure tendue qui coïncide avec η dans un voisinage du bord, ce voisinage contient des sphères convexes Σ'_0 et Σ'_1 proches respectivement de $S^2 \times \{0\}$ et $S^2 \times \{1\}$. Les structures η et η' sont alors isotopes relativement au bord sur $S^2 \times [0, 1]$ car elles le sont sur la région bordée par Σ'_0 et Σ'_1 . \square

Corollaire 4.6. *Soit (V, ξ) une variété de contact et $W \simeq S^2 \times [0, 1]$ une sous-variété de V feuilletée en sphères $S_t \simeq S^2 \times \{t\}$. Si S_0 et S_1 sont convexes et si (W, ξ) et $(V \setminus W, \xi)$ sont tendues, alors $(V \setminus S_1, \xi)$ est tendue.*

Démonstration. Soit D un disque plongé dans $V \setminus S_1$ et W' un épaississement de W assez petit pour que la composante de $W' \setminus S_1$ disjointe de W ne touche pas D . Grâce au lemme 4.4, on peut trouver sur V un champ de vecteurs qui préserve ξ et qui est transversal aux sphères S_t et nul hors de W' . Son flot fournit une isotopie de contact qui pousse D hors de W . \square

Corollaire 4.7. *Soit (V, ξ) une variété de contact et f_t , $t \in [0, 1]$, une isotopie de plongements $S^2 \rightarrow V$, d'images S_t . Si S_0 et S_1 sont convexes et si $(V \setminus S_0, \xi)$ est tendue, alors $(V \setminus S_1, \xi)$ est tendue.*

Démonstration. Si $S_0 \cup S_1$ borde dans V une sous-variété $W \simeq S^2 \times [0, 1]$, le corollaire 4.6 s'applique. En effet, comme S_0 est convexe, ξ est tendue sur W (ainsi que sur $V \setminus W \subset V \setminus S_0$). Sinon (après une perturbation C^∞ -petite éventuelle de l'isotopie f_t , laissant inchangés f_0 et f_1), on peut trouver une subdivision de $[0, 1]$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ et des plongements $g_i : S^2 \times [-1, 1] \rightarrow V$, $0 \leq i < k$, satisfaisant aux conditions suivantes :

- $g_i|_{S^2 \times \{0\}}$ coïncide avec f_{t_i} et son image S_{t_i} est convexe ;
- $\Sigma_i = g_i(S^2 \times \{-1\})$ est convexe ;
- $S_t = f_t(S^2)$ est contenue dans $g_i(S^2 \times]-1, 1])$ pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

Il est clair que $S_{t_i} \cup \Sigma_i$ et $\Sigma_i \cup S_{t_{i+1}}$ bordent dans V des sous-variétés diffeomorphes à $S^2 \times [0, 1]$. On conclut donc en invoquant $2k$ fois le premier argument. \square

Dans [Me], C. Meckert construit une structure de contact sur la somme connexe de deux variétés de contact (en dimension impaire quelconque). On montre ici qu'en dimension trois, cette opération et, plus généralement, les chirurgies d'indice un sont bien définies sur les variétés de contact tendues.

Soit (V, ξ) une variété de contact tendue et g_0, g_1 deux plongements de D^3 dans V , d'images disjointes B_0, B_1 et tels que $g_1 g_0^{-1}$ renverse l'orientation. On pose

$$(\tilde{V}, \tilde{\xi}) = (V \setminus \text{Int}(B_0 \cup B_1), \xi) \cup_{\partial} (S^2 \times [0, 1], \eta)$$

où η est la structure fournie par le lemme 4.4 à partir des plongements $f_i = g_i|_{\partial D^3} : S^2 = S^2 \times \{i\} \rightarrow V$ qui définissent le collage. L'énoncé suivant précise le théorème 4.1 :

Proposition 4.8. *La variété de contact $(\tilde{V}, \tilde{\xi})$ est tendue et ne dépend, à un isomorphisme près, que des classes d'isotopie de g_0 et g_1 .*

Remarque 4.9. Deux plongements $g, g' : D^3 \rightarrow V$ sont isotopes si et seulement s'ils vont dans la même composante connexe et $g' g^{-1}$ préserve l'orientation.

Démonstration. : Soit $g'_0, g'_1 : D^3 \rightarrow V$ des plongements respectivement isotopes à g_0, g_1 . Si $B'_i = g'_i(D^3) \supset B_i$ pour $i = 0, 1$, l'unicité établie dans le lemme 4.4 montre que la chirurgie définie par g'_0 et g'_1 donne une variété de contact $(\tilde{V}', \tilde{\xi}')$ isomorphe à $(\tilde{V}, \tilde{\xi})$. Sinon, on peut trouver une isotopie de contact de (V, ξ) qui amène $g_i(0)$ sur $g'_i(0)$ pour $i = 0, 1$, donc (d'après le théorème de Darboux) deux isotopies de plongements de contact

$$h_0^t, h_1^t : (D^3, \zeta) \rightarrow (V, \xi), \quad t \in [0, 1],$$

telles que $h_i^0(D^3) \subset B_i$ et $h_i^1(D^3) \subset B'_i$ pour $i = 0, 1$. Comme la chirurgie définie par h_0^t et h_1^t donne clairement une variété de contact indépendante de t , on conclut en invoquant deux fois le premier argument.

Pour voir que $\tilde{\xi}$ est tendue, on peut maintenant supposer que les boules $B_i = g_i(D^3)$ ont des bords convexes dans (V, ξ) . Le corollaire 4.6 montre alors que $(\tilde{V} \setminus \partial B_0, \tilde{\xi})$ est tendue. Si D est un disque plongé dans \tilde{V} , on peut trouver une isotopie qui amène $S_0 = \partial B_0$ sur une sphère S_1 disjointe de D . Comme $(\tilde{V} \setminus S_1, \tilde{\xi})$ est tendue d'après le corollaire 4.7, D ne peut être tangent à ξ en tous les points de son bord. \square

Par des arguments classiques de voisinages tubulaires et d'exhaustion, les théorèmes 4.2 et 4.3² découlent de la proposition suivante :

Proposition 4.10. *Soit (V, ξ) une variété de contact tendue et f_0, f_1 deux plongements isotopes de $S^2 \times [-1, 1]$ dans V . Si les structures $f_0^* \xi$ et $f_1^* \xi$ coïncident et si les sphères $f_i(S^2 \times \{\pm 1\})$ sont convexes, f_0 et f_1 sont isotopes par la restriction d'une isotopie de contact.*

Démonstration. : Le théorème de flexibilité 2.1 permet de construire, entre f_0 et f_1 , une isotopie f_t , $t \in [0, 1]$, pour laquelle on peut trouver une subdivision de $[0, 1]$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$, et des plongements $g_i : S^2 \times [-2, 2] \rightarrow V$, $0 \leq i < k$ satisfaisant aux conditions suivantes :

- $g_i|_{S^2 \times [-1, 1]} = f_{t_i}$ et les sphères $S_{t_i}^\pm = g_i(S^2 \times \{\pm 1\})$ sont convexes ;
- les sphères $\Sigma_i^\pm = g_i(S^2 \times \{\pm 2\})$ sont convexes ;
- $W_t = f_t(S^2 \times [-1, 1])$ est contenu dans $g_i(S^2 \times]-2, 2[)$ pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$;
- $f_{t_i}^*(\xi S_{t_i}^\pm) = g_i^*(\xi \Sigma_i^\pm) = f_0^*(\xi S_0^\pm)$.

Grâce au lemme 4.4, on observe ensuite qu'une structure de contact sur $S^2 \times [a, b]$ qui est tendue, à bord convexe, et qui trace le même feuilletage sur $S^2 \times \{a\}$ et $S^2 \times \{b\}$ est isotope, relativement au bord, à une structure invariante par translation verticale. On peut ainsi, par une isotopie de contact, dilater l'image de f_{t_i} sur celle de g_i (en respectant les paramétrages) puis contracter cette dernière sur l'image de $f_{t_{i+1}}$. Pour conclure, il reste à appliquer un résultat d'Eliashberg [El2] : tout contactomorphisme de $(S^2 \times [-1, 1], f_0^* \xi)$, égal à l'identité sur le bord, est isotope à l'identité par une isotopie de contact. \square

Dans [EH1], J. Etnyre et K. Honda montrent que la sphère de Poincaré ne porte pas de structure de contact négative. Si P (resp. $-P$) désigne la sphère de Poincaré munie d'une orientation donnée (resp. de l'orientation opposée), la somme connexe $P \sharp (-P)$ ne porte alors aucune structure tendue. Plus généralement, pour classier les structures de contact tendues sur une variété donnée, il suffit de les classier sur ses facteurs irréductibles.

Question 4.11. *Toute variété orientable irréductible et close porte-t-elle une structure de contact tendue ?*

4.2. Collages le long de tores incompressibles.

Une surface close S différente de la sphère S^2 est dite *incompressible* si elle est π_1 -injectée. Les tores incompressibles jouent un rôle fondamental dans les variétés de dimension 3, dû en partie au théorème de décomposition de Jaco-Shalen-Johannson [Ja, Ja-Sh, Jo] : pour toute variété irréductible V , il existe une collection minimale finie $(T_i)_{0 \leq i \leq n}$ de tores incompressibles deux à deux disjoints, unique à permutation et isotopie près, telle que toute composante de $V \setminus (\bigcup_{0 \leq i \leq n} T_i)$ soit ou un fibré de Seifert, ou atoroïdale (c'est-à-dire dans laquelle tout tore incompressible est parallèle à une composante de bord). La conjecture de géométrisation de W. Thurston pronostique que l'intérieur de chacune de ces composantes possède une *structure géométrique*, i.e. une métrique localement homogène, complète et de volume fini.

²On peut également déduire le théorème 4.3 du théorème de compactification démontré par Y. Eliashberg dans [El2].

Théorème 4.12. [Co3] *Soit (V, ξ) une variété de contact et $T \subset V$ un tore incompressible. Si T est pré-lagrangien et si $(V \setminus T, \xi|_{V \setminus T})$ est universellement tendue, alors (V, ξ) est universellement tendue.*

On rappelle qu'un tore T est *pré-lagrangien* s'il existe une forme de contact α (i.e. $\xi = \ker \alpha$) telle que $d\alpha|_T$ soit identiquement nulle. Par exemple, si ξ trace sur T un feuilletage en cercles, alors T est pré-lagrangien. Le recollement le long des tores est plus subtil que le recollement le long des sphères. Si une des hypothèses *pré-lagrangien*, *incompressible* ou *universellement tendu* vient à manquer, on peut aboutir à une variété vrillée [Co3, Gi5].

4.3. Le cas à bord.

Si on poursuit la décomposition d'une variété V (obtenue éventuellement après découpage le long de tores incompressibles) le long d'une hiérarchie, on est amené à considérer le découpage le long de surfaces à bord. On donne ici des théorèmes de recollement qui permettent de faire le chemin inverse [HKM1, HKM2].

On prolonge d'abord le théorème 4.1 au cas des chirurgies effectuées le long d'un disque.

Théorème 4.13. [Co3] *Soient (V, ξ) une variété de contact de dimension 3 à bord et D un disque plongé dans V intersectant ∂V transversalement suivant $\partial D = \gamma$. Si γ est une courbe transversale à ξ d'autoenlacement -1 et si la structure induite par ξ sur la variété à coins $V \setminus \overline{D}$ est tendue, alors ξ est tendue sur V .*

Remarque 4.14. L'hypothèse portant sur la valeur de l'autoenlacement de γ est primordiale [Co3].

Théorème 4.15. [Co3] *Soient (V, ξ) une variété de contact et $S \subset V$ une sous-variété orientée, incompressible et telle que $\partial S \subset \partial V$. On suppose que ∂S est transversal positivement à ξ , que ξS est presque de type Morse-Smale, que toutes les singularités de ξS sont positives et que toutes les orbites périodiques de ξS sont répulsives. Si la structure induite par ξ sur $V \setminus S$ est universellement tendue, alors ξ est universellement tendue.*

La situation la plus simple dans laquelle ce résultat s'applique est celle où S est un anneau dont le feuilletage caractéristique est non singulier et contient une orbite périodique non dégénérée. Dans le cas où S est un disque, l'hypothèse qui porte sur le signe des singularités est optimale et il semble par conséquent difficile de l'affaiblir dans le cadre plus général du théorème 4.15.

4.4. Chirurgies de Dehn admissibles.

La chirurgie de Dehn est une opération fondamentale en topologie de dimension 3, notamment car toute variété close orientable peut être obtenue par chirurgie de Dehn sur un entrelacs de la sphère S^3 .

On étudie ici une extension naturelle de la notion de chirurgie de Dehn dans le cadre de la géométrie de contact [Gay], qui englobe la classique *chirurgie legendrienne d'indice -1* [El4]. On obtient cependant que le caractère tendu n'est pas toujours préservé, alors qu'un critère plus fort de remplissage symplectique assure que la variété produite est tendue.

4.4.1. *Pentes.*

Soit $T = D \times S^1 = \{(r \leq 1, \theta, z)\}$ un tore solide muni de coordonnées cylindriques. On note T_b le tore $\{r = b\}$ ($T_1 = \partial T$) pour $0 < b \leq 1$. Les deux courbes m_b et p_b de T_b d'équations respectives $\{r = b, z = 0 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$ et $\{r = b, \theta = 0 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$, orientées par $\frac{\partial}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial}{\partial z}$, déterminent une base de $H_1(T_b, \mathbb{R}) = \mathbb{R}[m_b] + \mathbb{R}[p_b]$. À tout feuilletage orienté non singulier et sans composante de Reeb de T_b , les cycles asymptotiques de Schwartzmann [Sc] permettent d'associer une direction (orientée) dans $H_1(T_b, \mathbb{R})$ et donc, compte tenu de la trivialisatıon précédente, un angle dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ appelé la *pente* du feuilletage. Par exemple, la pente du feuilletage de T_b défini comme $(\{(r = b, z = c)\})_{c \in S^1}$ (et orienté comme m_b) vaut 0 et celle de $(\{(r = b, \theta = c)\})_{c \in S^1}$ (orienté comme p_b) vaut $\frac{\pi}{2}$.

4.4.2. *Structures normales.*

Une structure de contact ξ sur T est dite *normale* si elle est tendue, si le feuilletage caractéristique ξT_1 est non singulier et sans composante de Reeb et si m_1 est transversal à ξ et d'autoenlacement -1 . Deux structures de contact normales sur T qui coıncident sur T_1 sont isotopes relativement à T_1 ([ML2]). De plus, toute structure normale ξ sur T est isotope relativement à T_1 à une structure qui, pour tout $b \in]0, 1]$, trace sur T_b un feuilletage non singulier, sans composante de Reeb et transversal à m_b . Toutes les structures de contact normales qu'on envisage par la suite possèdent cette propriété. Se donner un tore solide T ainsi qu'un feuilletage au bord sans singularité ni composante de Reeb, non parallèle au méridien, détermine une unique (classe d'isotopie de) structure normale sur T qui imprime ce feuilletage au bord. Pour un tore normal, la condition de contact impose à la fonction *pente de T_b* d'être une fonction décroissante de $b \in]0, 1]$.

4.4.3. *Chirurgies admissibles.*

Soient à présent une variété de contact (V, ξ) et $T \subset V$ un tore normal. À toute courbe fermée simple $\alpha \subset \partial T$, non isotope au méridien de T et non contractile dans ∂T , on associe une chirurgie de la variété de contact (V, ξ) de la façon suivante : on excise le tore T de V pour recoller à $V \setminus \text{Int} T$ un tore solide T' , en stipulant que l'on recolle un méridien de T' sur α (c'est la chirurgie de Dehn associée), et on prolonge la structure $\xi|_{V \setminus \text{Int} T}$ sur T' par l'unique structure normale qui imprime $\xi \partial T$ sur $\partial T' \simeq \partial T$.

Quitte à coorienter différemment la structure ξ sur T , on peut toujours supposer que la pente p de ξT_1 est dans $] -\pi, 0[$. Sous cette hypothèse, dans le cas où la pente de α est comprise entre p et 0, on parle de chirurgie *admissible*.

Un cas particulier intéressant est celui où la pente de ξT_1 est $-\frac{\pi}{2}$. Le feuilletage ξT_1 possède alors une orbite périodique δ . Dans cette situation, on peut vérifier que la chirurgie admissible de pente $-\frac{\pi}{4}$ opérée sur T_1 conduit à la même variété de contact que celle obtenue par *chirurgie legendrienne d'indice -1* le long de la courbe legendrienne δ .

Plus généralement, le théorème de Darboux assure que tout entrelacs Γ contenu dans une variété de contact (V, ξ) et transversal à ξ possède un voisinage normal. On peut ainsi parler de chirurgie admissible sur un entrelacs transversal.

4.4.4. *Cas des structures remplissables.*

Cette opération naturelle sur les variétés de contact est essentiellement compatible avec le cobordisme contact-symplectique.

On dit qu'une variété de contact close (compacte sans bord) (V, ξ) est *symplectiquement remplissable* s'il existe une variété symplectique compacte (W, ω) telle que $V = \partial W$, que $\omega|_\xi$ soit non dégénérée et que $\omega \wedge \omega$ oriente V comme $\alpha \wedge d\alpha$ (où $\xi = \ker \alpha$). De manière plus restrictive, on dit que (V, ξ) est *de type contact* s'il existe en plus sur W un champ de vecteurs transversal à V qui dilate uniformément ω . D'après Y. Eliashberg [El3] et M. Gromov [Gro], toute variété symplectiquement remplissable est tendue. La réciproque n'est pas vraie ; J. Etnyre et K. Honda ont récemment fourni un contre-exemple [EH2].

Les notions de structures remplissables et de type contact s'étendent au cas où V n'est pas compacte [ET]. Modulo une condition de *géométrie finie* à l'infini (voir [ET]), il reste que toute structure remplissable est tendue. La question du remplissage des structures tendues s'étend ainsi au cas des variétés ouvertes.

Théorème 4.16. (D. Gay [Gay]) : *Toute variété obtenue par chirurgie admissible sur un entrelacs transversal dans une variété de type contact est symplectiquement remplissable.*

4.4.5. Un contre-exemple universellement tendu.

On exhibe un exemple de variété universellement tendue qui devient vrillée après une chirurgie admissible sur un entrelacs. Il s'agit d'un comportement original pour une structure de contact universellement tendue, celle-ci n'étant pas, d'après ce qui précède, de type contact.

Théorème 4.17. [Co6] *Il existe une variété de contact universellement tendue (V, ζ) et un entrelacs $\Gamma \subset V$ transversal à ζ tels que les variétés obtenues à partir de (V, ζ) par certaines chirurgies de Dehn admissibles le long de Γ soient vrillées.*

L'exemple est un corps en anses de genre 2. Sa construction résulte d'une réponse positive à la question suivante. Étant donnés une variété de contact (V, ξ) , un disque vrillé $D \subset V$ ainsi que deux courbes orientées $\gamma_1, \gamma_2 \subset V$, positivement transversales à ξ et qui intersectent D transversalement chacune en un point avec le même signe, le germe de la structure ξ près de $D \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$ est vrillé. Si U est un petit voisinage tubulaire de $D \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$, est-il possible d'obtenir $(U, \xi|_U)$ comme le produit d'une chirurgie admissible sur un petit voisinage T de $\gamma_1 \cup \gamma_2$ à partir d'une variété de contact tendue ?

Au lieu de partir d'un entrelacs à deux composantes, on peut obtenir le même résultat en considérant le voisinage U d'un disque vrillé D et d'une courbe transversale qui intersecte D transversalement en deux points avec un signe constant.

En ce qui concerne les chirurgies non admissibles, les exemples de variétés tendues (closes ou non) qui aboutissent à des variétés vrillées sont très simples à construire, et leur étude n'est donc pas pertinente.

Les exemples produits dans la démonstration du théorème 4.17 ne recouvrent pas toutes les chirurgies admissibles possibles sur l'entrelacs considéré. La question ouverte par cette étude est : étant donnés un nœud (ou un entrelacs) transversal dans une variété de contact tendue et une trivialisation de son fibré normal, peut-on trouver des conditions portant sur l'indice de la chirurgie (dépendant éventuellement des invariants du nœud) qui assurent que la nouvelle variété est tendue ? Elle englobe le cas des chirurgies legendriennes d'indice -1 .

On constate par exemple que si l'entrelacs Γ considéré est contenu dans une boule (ouverte) $B \subset (V, \xi)$, alors toute chirurgie admissible sur Γ donne naissance à une variété (V', ξ')

tendue. En effet, quitte à élargir la boule B , on peut supposer qu'elle contient le voisinage normal de Γ sur lequel on effectue la chirurgie. D'après un théorème d'Eliashberg [El2] (proche du théorème 2.3), l'espace \mathbb{R}^3 porte une unique structure de contact tendue positive ζ_0 à laquelle $\xi|_B$ est donc conjuguée. Comme (\mathbb{R}^3, ζ_0) est explicitement de type contact, c'est aussi le cas de $(B, \xi|_B)$. En particulier, par combinaison du théorème 4.16 de D. Gay et du critère d'Eliashberg et Gromov, l'image $(\hat{B}, \hat{\xi})$ de $(B, \xi|_B)$ par chirurgie admissible le long de Γ est une variété de contact tendue. De plus, par construction, (V', ξ') est obtenue par collage entre $(V \setminus B, \xi)$ et $(\hat{B}, \hat{\xi})$. Ce collage a lieu le long d'une sphère et, d'après le théorème 4.1, (V', ξ') est tendue.

K. Honda montre dans [Ho3] qu'il existe également des variétés de contact tendues (ouvertes) qui ne résistent pas à des chirurgies legendriennes d'indice -1 . L'exemple produit est une variante de celui fournit par le théorème 4.17. Il améliore le théorème 4.17 du point de vue de l'indice de la chirurgie, mais perd son caractère universellement tendu.

Question 4.18. *Existe-t-il une variété universellement tendue qui soit rendue vrillée par une chirurgie legendrienne d'indice -1 ? Peut-on trouver des exemples de variétés closes ?*

5. CONSTRUCTIONS DE VARIÉTÉS DE CONTACT TENDUES

5.1. Collages et hiérarchies.

On donne ici quelques exemples d'application des théorèmes de chirurgies. Voici une condition suffisante pour qu'une structure de contact définie sur un fibré en cercles soit universellement tendue :

Proposition 5.1. *Soient $p : V \rightarrow S$ un fibré en cercles sur une surface S et ξ une structure de contact sur V telle que ξ soit transversale aux fibres de V sauf sur la préimage par p d'une collection $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq n}$ de courbes fermées simples, non contractiles et deux à deux disjointes de S . Si on suppose de plus que ξ est transversale à chaque tore $T_i = p^{-1}(\gamma_i)$, alors la structure ξ est universellement tendue.*

Démonstration. Pour montrer que ξ est universellement tendue, on remarque d'abord que sur chaque composante de $V \setminus \bigcup T_i$, la structure de contact induite par ξ est universellement tendue car transversale aux fibres de la fibration (voir par exemple la proposition 3.5.6 de [El.Th]). On note ensuite que les feuilles de ξT_i coïncident avec les fibres de p . On est donc dans les hypothèses du théorème 4.12 qui affirme que lorsqu'on colle ces composantes entre elles pour reconstituer (V, ξ) , on reste dans la classe des structures universellement tendues. \square

On déduit de ce résultat un moyen de lire sur le feuilletage caractéristique d'une surface convexe si le germe de structure induit au voisinage de cette surface est universellement tendue.

Corollaire 5.2. [Co3] *Soient (V, ξ) une variété de contact de dimension 3 et $\phi : S \rightarrow V$ un plongement d'une surface S dans V , d'image convexe et tel que chaque composante d'une sous-variété Γ qui décompose $\phi^*(\xi\phi(S))$ soit non contractile dans S . Alors il existe un voisinage U de $\phi(S)$ dans V tel que $\xi|_U$ soit universellement tendue.*

Remarque 5.3. Réciproquement, si on sait que ξ est tendue au voisinage de $\phi(S)$, alors, d'après le théorème de flexibilité 2.1 de E. Giroux, chaque composante de Γ est non contractile.

Démonstration. Comme $\phi(S)$ est convexe, il existe un plongement $\Phi : S \times \mathbb{R} \rightarrow V$ tel que $\Phi(S \times \{0\}) = \phi(S)$ et que la structure $\Phi^*\xi$ soit \mathbb{R} -invariante. Par construction ([Gi1]), la sous-variété $\Gamma \subset S \times \{0\}$ est isotope, par une isotopie dont l'image est transversale à $\Phi^*(\xi\phi(S))$, à la sous-variété Γ' de $S \times \{0\}$ définie comme le lieu des points où ξ est verticale. On déduit alors directement de la proposition 5.1 que $\Phi^*\xi$ est universellement tendue. \square

L'intérêt de la proposition 5.1 est qu'elle donne un critère systématique. En effet, R. Lutz a démontré dans [Lu] que pour tout système non vide de courbes fermées simples non contractiles et deux à deux disjointes qui découpe S ($\neq S^2$) et pour tout fibré en cercles V sur S , il existe une structure de contact sur V qui vérifie les hypothèses de la proposition 5.1 pour ce système de courbes. De plus, réciproquement, E. Giroux [Gi5] a récemment démontré que toute structure de contact universellement tendue portée par un fibré en cercles sur une surface différente de S^2 est de ce type.

K. Honda, W. Kazez et G. Matić donnent dans [HKM2] une version du théorème 4.15 pour les surfaces à bord legendrien. Ils montrent que ce résultat s'applique parfaitement dans le cadre des décompositions suturées de D. Gabai [Ga1], où on identifie âme des sutures et courbe de séparation.

Dans un travail en cours, on montre que l'hypothèse de bord transversal s'adapte également à cette théorie, et que sur toute variété irréductible bordée par une union non vide de tores, on peut construire une structure de contact tendue ξ qui possède un *champ de Reeb* (c-à-d un champ de contact transversal à ξ) tangent au bord et sans orbite périodique contractile. On peut attendre de ce résultat des applications topologiques, *via* les travaux de H. Hofer [Hof] sur la dynamique des champs de Reeb, ainsi que des applications en homologie de contact [EGH]. On sait par exemple [Hof] que toute variété de contact qui admet un champ de Reeb sans orbite périodique contractile est tendue et irréductible.

Question 5.4. (*K. Honda*) Une variété de contact qui possède un champ de Reeb sans orbite périodique d'ordre fini dans $\pi_1(V)$ est-elle revêtue par \mathbb{R}^3 ?

Question 5.5. Une variété orientable, irréductible et close dont le groupe fondamental est infini porte-t-elle une forme de contact dont le champ de Reeb est sans orbite périodique contractile ?

5.2. Cas des variétés toroïdales – Liens avec les feuilletages sans composante de Reeb.

Dans [ET], Y. Eliashberg et W. Thurston mettent en évidence les liens profonds, en dimension 3, entre le monde des structures de contact et celui des feuilletages de codimension 1. Ils démontrent en particulier que sur une variété orientée compacte V de dimension 3, tout champ de plans intégrable η transversal à ∂V et différent du feuilletage en sphères de $S^2 \times S^1$ est limite, pour la topologie C^0 , d'une suite de structures de contact positives $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Mieux, aux propriétés de rigidité de η répondent des propriétés de rigidité de ξ_n . C'est ainsi que si le feuilletage engendré par η diffère du feuilletage en sphères de $S^2 \times S^1$ et possède

une transversale fermée qui rencontre toutes les feuilles — auquel cas on parle de feuilletage *tendu* —, les structures ξ_n qui l'approchent sont tendues.

Le parallélisme entre les notions de feuilletage et de structure de contact a conduit ces auteurs à introduire la notion de feuilletact : un champ de plans $\xi = \{\alpha = 0\}$ est un *feuilletact* (positif) si $\alpha \wedge d\alpha \geq 0$ en tout point.

Théorème 5.6. [ET] *Sur une variété orientée, tout feuilletact positif différent du feuilletage en sphères de $S^2 \times S^1$ est limite C^0 de structures de contact positives.*

Dans le théorème de recollement 4.12, l'hypothèse : *le feuilletage ξT est linéaire* se révèle fondamentale. En se basant sur un résultat de chirurgie omettant cette hypothèse cruciale, Y. Eliashberg et W. Thurston annoncent dans [ET] que toute structure de contact C^0 -proche d'un feuilletage sans composante de Reeb est universellement tendue. C'est ce trou dans leur preuve que l'on comble en partie, en montrant les résultats suivants :

Théorème 5.7. [Co8] *Sur une variété orientée et fermée, tout feuilletage sans composante de Reeb ($\neq (S^2 \times \{\theta\})_{\theta \in S^1}$) est limite C^0 de structures de contact universellement tendues positives.*

Théorème 5.8. [Co8] *Si V est une variété orientée, irréductible, fermée (compacte sans bord) de dimension 3 et T_1, \dots, T_n une collection non vide de tores incompressibles disjoints dans V , alors V porte une structure de contact universellement tendue positive qui trace sur T_i , $i = 1, \dots, n$, un feuilletage en cercles.*

Pour prouver ces théorèmes, on reprend le fil de la démonstration de Y. Eliashberg et W. Thurston. On approche tout feuilletage sans composante de Reeb par un feuilletage qui possède un nombre fini de feuilles compactes. On excise la variété en retirant un voisinage régulier des feuilles toriques. Le feuilletage défini sur la nouvelle variété est alors tendu. La stratégie est ensuite d'approcher ce feuilletage par des structures de contact puis d'appliquer le théorème de recollement 4.12. Deux difficultés apparaissent : il n'est pas possible d'imposer aux structures de contact produites de tracer sur le bord un feuilletage linéaire ; on veut éviter d'appliquer une version non compacte du résultat (dont la preuve est plus délicate) affirmant que toute structure de contact proche d'un feuilletage tendu est tendue. Pour contourner la seconde difficulté, on s'arrange pour que les variétés à bord considérées apparaissent toujours comme sous-variétés feuilletées et π_1 -injectées de variétés fermées dont le groupe fondamental est résiduellement fini.

Question 5.9. *Le feuilletage en tores de T^3 peut être approximé par une infinité de structures de contact différentes. Si \mathcal{F} est tendu et si V est atoroïdale (ou simplement si \mathcal{F} n'a pas de feuille torique), y a-t-il unicité de l'approximation à isotopie près ? (Deux structures assez proche de \mathcal{F} et de même signe sont-elles isotopes ?)*

6. LE THÉORÈME DE CLASSIFICATION

L'objectif de ce chapitre est d'esquisser la preuve du résultat suivant :

Théorème 6.1. [CGH1, CGH2, Co5, Co7] *Une variété close, orientable, irréductible porte une infinité de structures de contact tendues non isomorphes si et seulement si elle est*

toroïdale. Toute variété close porte un nombre fini de structures de contact tendues à homotopie près dans l'espace des champs de plans.

La finitude homotopique était déjà connue par P. Kronheimer et T. Mrowka [KM] pour les structures symplectiquement remplissables, qui forment un sous-ensemble strict des structures tendues [EH1].

D'après le théorème 5.7, tout feuilletage sans composante de Reeb est homotope comme champ de plans à une structure de contact tendue. On obtient ainsi (voir aussi [Ga4]) :

Corollaire 6.2. [CGH1, CGH2, Ga4] *Toute variété close porte un nombre fini de feuilletages sans composante de Reeb, à homotopie près dans l'espace des champs de plans.*

Pour préciser une partie de l'énoncé du théorème 6.1, on introduit la notion de *modification de Lutz*.

Soit $T \subset (V, \xi)$ un tore transversal à ξ . Il existe un voisinage tubulaire $U = (\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) \times [0, 2\pi]$ de $T = (\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) \times \{\pi\}$ fibré par des intervalles legendriens $\{pt\} \times [0, 2\pi]$.

Dans le système de coordonnées $((x, y), t)$ pour $(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) \times [0, 2\pi]$, la structure ξ est donnée par l'équation :

$$\cos f(x, y, t)dx - \sin f(x, y, t)dy = 0,$$

où $f : (\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est à valeur dans le cercle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit une fonction lisse et croissante $g_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $g_n(0) = 0$ et $g_n(2\pi) = 2n\pi$. Le champ de plans donné sur U comme le noyau de $\alpha_n = \cos(f + g_n)dx - \sin(f + g_n)dy$ est une structure de contact. Il coïncide avec ξ sur ∂U , et peut donc être étendu par ξ pour donner une structure de contact ξ_n sur V . On l'appelle *modification de Lutz de ξ d'indice n* . (Si la structure de contact ξ_n dépend des choix du voisinage tubulaire U et de la fonction g_n , sa classe d'isotopie dépend seulement de T .)

On considère une fonction lisse $\chi : U \rightarrow [0, 1]$ qui vaut 0 sur ∂U et est strictement positive dans l'intérieur de U . Le chemin de 1-formes $(1-t)\alpha_0 + t\alpha_n + t(1-t)\chi dt$ définit un chemin de champs de plans relatif à ∂U entre $\xi|_U$ et $\ker \alpha_n$. Les structures ξ et ξ_n sont donc homotopes comme champs de plans.

Si (V, ξ) est vrillée, certaines modifications de Lutz de ξ ne changent pas sa classe d'isotopie. Par exemple, si T borde un tore solide et si son feuilletage caractéristique ξT est une suspension, alors la nouvelle structure de contact ξ_n est aussi vrillée et est donc isotope à ξ par le théorème de classification des structures vrillées de Y. Eliashberg. En général, on ne sait pas si toute modification de Lutz sur une structure vrillée donne une structure vrillée. Cependant, on peut montrer (exercice) que si (V, ξ) est vrillée et si (V, ξ_n) est obtenue par modification de Lutz sur un tore pré-lagrangien incompressible de (V, ξ) , alors un revêtement fini de (V, ξ_n) est vrillé. Qu'en est-il de (V, ξ_n) ?

À modification de Lutz près, il n'y a qu'un nombre fini de structures tendues.

Théorème 6.3. *Pour toute variété close V , il existe un nombre fini de structures de contact ξ_1, \dots, ξ_k et pour tout $1 \leq i \leq k$ un nombre fini de tores $T_i^1, \dots, T_i^{k_i}$ transversaux à ξ_i tels que toute structure de contact tendue sur V soit obtenue, à isotopie près, à partir de l'une des structures ξ_i par modification de Lutz sur les $(T_i^j)_{1 \leq j \leq k_i}$.*

Comme une modification de Lutz ne modifie pas la classe d'homotopie de la structure, la finitude homotopique dans le théorème 6.1 découle immédiatement du théorème 6.3.

6.1. Cas des variétés toroïdales – Torsion.

Pour produire des structures de contact différentes, on effectue des modifications de Lutz sur des tores pré-lagrangiens incompressibles. Ces structures sont différenciées par un invariant introduit par E. Giroux [Gi3] : la torsion.

Si (V, ξ) est une variété de contact, on associe à chaque classe d'isotopie C de plongements du produit $T^2 \times [0, 2\pi]$ dans V un entier naturel (éventuellement $+\infty$), noté $Tor(V, \xi, C)$, appelé la *torsion* de ξ dans la classe C et défini de la manière suivante : pour $n \geq 1$, on note ξ_n la structure de contact définie sur $T^2 \times I = T^2 \times [0, 2\pi] = \{(x, y, t)\}$ par l'équation $\cos ntdx - \sin ntdy = 0$ et $Tor(V, \xi, C)$ le supremum de l'ensemble des entiers positifs n pour lesquels il existe un plongement de contact de $(T^2 \times I, \xi_n)$ dans la classe C de (V, ξ) . Si un tel plongement n'existe pas, on pose $Tor(V, \xi, C) = 0$.

On montre que cet invariant est effectif dans de nombreuses situations.

Si $\phi, \psi : T^2 \rightarrow V$ sont deux plongements incompressibles du tore (injectifs sur $\pi_1(T^2)$), on dit que ϕ a une *intersection persistante* avec ψ si pour tout plongement ϕ' isotope à ϕ , l'intersection $\phi'(T^2) \cap \psi(T^2)$ est non vide. Dans cette situation, une courbe $\gamma \subset T^2$ est *associée* à ϕ et ψ si la courbe $\psi(\gamma)$ ne peut pas être disjointe de l'image de ϕ par une isotopie de ψ . Enfin, un plongement du tore $\phi : T^2 \rightarrow V$ est dit *normal* s'il existe un plongement $\psi : T^2 \rightarrow V$ tel que ϕ ait une intersection persistante avec ψ . Un plongement incompressible est normal si et seulement si son image n'appartient pas à la famille de décomposition de Jaco-Shalen-Johannson.

On étend ces définitions de manière naturelle au cas des plongements du tore épais $T^2 \times [0, 2\pi]$.

Théorème 6.4. [Co5] *Si (V, ξ) est une variété de contact universellement tendue irréductible et si C est une classe d'isotopie normale, alors : $Tor(V, \xi, C) < \infty$.*

Remarque 6.5. On présume que pour toute classe d'isotopie C de plongements du produit $T^2 \times I$ dans une variété de contact (universellement ?) tendue (V, ξ) , on a : $Tor(V, \xi, C) < \infty$.

Le fait pour un tore d'être pré-lagrangien est non générique et rare. De même que les tores lagrangiens dans le fibré cotangent de T^2 muni de sa forme symplectique naturelle (différentielle de la forme de Liouville) sont tous isotopes à la section nulle [Gi3], on obtient de fortes restrictions quant à la présence de tores pré-lagrangiens dans une classe d'isotopie donnée.

Théorème 6.6. [Co5] *Soient (V, ξ) une variété de contact irréductible et universellement tendue et $\phi : (T^2 \times I, \xi_1) \rightarrow (V, \xi)$ un plongement de contact. Si $\psi : T^2 \rightarrow V$ est un plongement incompressible qui possède une intersection persistante avec ϕ , alors aucun tore de V isotope à l'image de ψ n'est pré-lagrangien.*

Comme corollaire, on montre :

Théorème 6.7. [Co5] *Si (V, ξ) est une variété de contact close, irréductible et universellement tendue, seules un nombre fini de classes d'isotopies de sous-variétés de V difféomorphes à $T^2 \times I$ contiennent une sous-variété de contact conjuguée à $(T^2 \times I, \xi_1)$.*

Le théorème 6.4 est une conséquence du lemme fondamental suivant :

Lemme 6.8. *Soient (V, ξ) une variété de contact universellement tendue irréductible, $\phi : (T^2 \times [0, 2\pi], \xi_k) \rightarrow (V, \xi)$ un plongement de contact, $\psi : T^2 \rightarrow V$ un plongement ayant une intersection persistante avec ϕ et γ une courbe associée à ϕ et ψ . Si la courbe $\psi(\gamma)$ est legendrienne, on a : $tb(\psi(\gamma), \psi(T^2)) \leq -k$.*

Voici tout d'abord comment le lemme 6.8 implique le théorème 6.4.

Démonstration. On sait que C est une classe d'isotopie normale. Soit donc $\psi : T^2 \rightarrow V$ un plongement incompressible du tore tel que tout plongement ϕ dans C ait une intersection persistante avec ψ , et γ une courbe associée à $\phi \in C$ et ψ . Quitte à effectuer une isotopie de ψ , on suppose que $\psi(\gamma)$ est une courbe legendrienne. Dès lors, d'après le lemme 6.8, si $\phi : (T^2 \times I, \xi_n) \rightarrow (V, \xi)$ est un plongement de contact dans C , on a :

$$n \leq -tb(\psi(\gamma), \psi(T^2)).$$

□

Démonstration du Théorème 6.6. Un tore pré-lagrangien dans V porte un feuilletage caractéristique linéaire et possède donc un voisinage dans (V, ξ) conjugué à $(T^2 \times [\theta_0 - \epsilon, \theta_0 + \epsilon], \ker(\cos \theta dx - \sin \theta dy))$ par un plongement F . En particulier, il existe une valeur de $\theta \in [\theta_0 - \epsilon, \theta_0 + \epsilon]$ telle que le feuilletage de $T^2 \times \{\theta\}$ soit un feuilletage en cercles et que toute feuille γ de ce feuilletage soit associée à ϕ et ψ (voir [Co5]). Dès lors, si l'image de F est isotope à celle de ψ , on a, par application du lemme 6.8 : $tb(F(\gamma), F(T^2 \times \{\theta\})) \leq -1$, ce qui contredit le fait que γ est une feuille. (Le long d'une feuille γ , la structure est transversale au tore qui la porte, et donc l'invariant de Thurston-Bennequin relatif est nul.) □

On déduit de la conjonction des théorèmes 6.4 et 6.6 le résultat de rigidité 6.7.

Démonstration du Théorème 6.7. On commence par appliquer une remarque de E. Giroux : si ϕ est un plongement de contact de $(T^2 \times [0, 2\pi], \xi_1)$ dans (V, ξ) , comme ξ est tendue, nécessairement $\phi(T^2 \times \{0\})$ est incompressible. On observe ensuite que si $\phi, \psi : (T^2 \times I, \xi_1) \rightarrow (V, \xi)$ sont deux plongements de contact, alors $\psi(T^2 \times \{0\})$ est pré-lagrangien et, par application du théorème 6.6, les images de ϕ et ψ peuvent être disjointes par une isotopie de ψ .

Dès lors, si $(\phi_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une suite de plongements de $(T^2 \times I, \xi_1)$ dans (V, ξ) , on montre, par application d'un lemme de topologie déduit des travaux de Waldhausen [Wa], que les images des ϕ_i peuvent être disjointes dans leur ensemble.

Pour achever la démonstration, il reste à rappeler un résultat de Kneser et Haken (voir par exemple [Ja]) : pour toute variété fermée et irréductible V de dimension 3, il existe un entier n_V , tel que si $p > n_V$, toute collection de p surfaces incompressibles disjointes dans V comprend au moins deux surfaces qui bordent un produit. Ici, on obtient directement qu'il existe au plus n_V classes d'isotopie de sous-variétés de contact de (V, ξ) conjuguées à $(T^2 \times I, \xi_1)$. □

Corollaire 6.9. [Co5] *Si (V, ξ) est une variété de contact universellement tendue irréductible, pour laquelle il existe un plongement normal ϕ de T^2 d'image pré-lagrangienne, alors il existe sur V une infinité de structure de contact universellement tendues, deux à deux homotopes comme champs de plans mais deux à deux non isomorphes.*

Démonstration. On effectue une modification de Lutz d'indice n sur l'image de ϕ . La structure ξ_n obtenue est homotope à ξ et universellement tendue d'après le théorème 4.12. Par construction, on a : $Tor(V, \xi_n, C) \geq n$.

D'après le théorème 6.7, il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isotopie de sous-variétés de V qui ont une torsion non nulle et parmi celles-ci, les classes normales ont une torsion finie. Si n est choisi supérieur à $\sup_C \{Tor(V, \xi, C), C \text{ normale}\}$, on est assuré que (V, ξ_n) n'est pas isomorphe à (V, ξ) . On peut ainsi construire une famille de structures de contact universellement tendues homotopes $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sur V pour laquelle la suite $\sup_C \{Tor(V, \eta_k, C), C \text{ normale}\}$ est strictement croissante. Les membres de cette famille sont alors deux à deux non isomorphes, bien qu'homotopes comme champs de plans. \square

L'existence d'une structure de départ pour le corollaire 6.9 est donnée par le théorème 5.8.

Finalement, dans le cas où il n'existe pas de tore normal, on obtient aussi l'existence d'une infinité de structures de contact tendues. Ce dernier résultat est basé sur une étude menée indépendamment par E. Giroux [Gi4] et K. Honda [Ho1] qui classifie les structures de contact tendues sur le tore épais $T^2 \times I$. On construit une famille particulière de structures tendues, à partir de déformation de feuilletages tendus, dont la torsion dans une certaine classe est croissante et finie.

On obtient (voir aussi [HKM2]) :

Théorème 6.10. [Co7] *Toute variété orientable, close, irréductible et toroïdale porte une infinité de structures de contact tendues deux à deux non isomorphes.*

Question 6.11. *A-t-on $Tor(V, \xi, C) < +\infty$ pour toute classe C ? Que se passe-t-il si ξ n'est pas universellement tendue ?*

6.2. Finitude homotopique et isotopique.

Tous les résultats contenus dans cette section sont le fruit d'un travail réalisé en collaboration avec Emmanuel Giroux et Ko Honda. On y résume la preuve du théorème 6.3.

6.2.1. Surfaces branchées.

Une *surface branchée* est un espace topologique localement modelé sur l'un des trois modèles de la figure 1. Le voisinage du bord d'une surface branchée est localement modelé

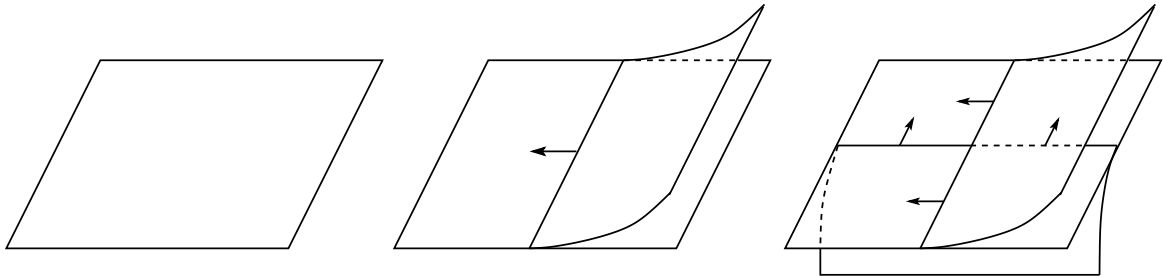


FIGURE 1. Les trois modèles locaux pour une surface branchée. Les flèches indiquent la direction de branchement.

sur la moitié des modèles de gauche et du centre de la figure 1, de sorte que le bord est une

voie ferrée (“train track”). Le *lieu de branchement* L d’une surface branchée \mathcal{B} est l’ensemble des points p de \mathcal{B} dont aucun voisinage n’est modelé sur un plan ou un demi-plan. C’est une collection de courbes plongées qui s’intersectent transversalement en des points doubles. Si \mathcal{B} est plongée dans une variété de dimension 3, un voisinage $N(\mathcal{B})$ de \mathcal{B} admet une fibration par intervalles et une projection $\pi : N(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$ (voir la figure 2). Le bord de $N(\mathcal{B})$ se décompose en deux parties, le bord horizontal $\partial_h N(\mathcal{B})$ qui est transversal à la fibration et le bord vertical $\partial_v N(\mathcal{B})$ qui lui est tangent.

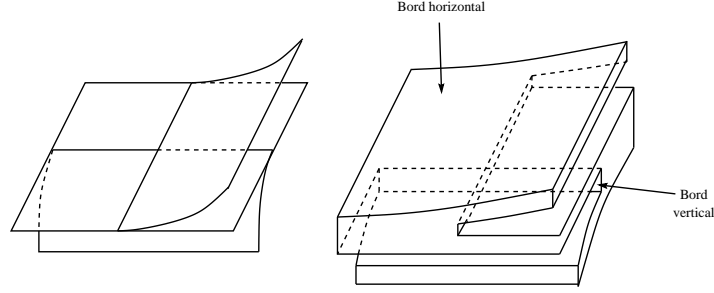


FIGURE 2. Le voisinage fibré d’une surface branchée.

6.2.2. *Triangulations maximales.*

On décrit l’outil principal pour prouver les théorèmes 6.1 et 6.3, qui fait écho à la théorie des surfaces normales de Kneser [Kn] et Haken [Ha1, Ha2]. Il s’agit de normaliser toute structure de contact tendue par rapport à une triangulation fixée. Ces techniques sont aussi similaires à celles employées par Gabai dans [Ga4].

Soit τ une triangulation d’une variété V de dimension 3. On note τ^i le i -squelette de τ .

Étant donnée une structure de contact tendue ξ sur V , on peut isotoper τ de sorte que son 1-squelette soit un graphe legendrien et que chaque face soit convexe. Une telle triangulation est appelée *triangulation de contact*. C’est un exercice facile car :

- tout graphe plongé peut être C^0 -approché par un graphe legendrien ;
- l’invariant de Thurston-Bennequin $tb(\gamma)$ le long de chaque arête γ , calculé avec la trivialisation donnée par chaque face adjacente, peut être rendu strictement négatif par une isotopie C^0 -petite de τ^1 relative à τ^0 ;
- par généricité, après une isotopie C^0 -petite dans un voisinage de τ^1 relative à τ^1 , chaque face peut être rendue convexe par une isotopie C^∞ -petite relative à τ^1 [Gil].

La triangulation obtenue est singulière : en chaque sommet x , les arêtes adjacentes sont toutes tangentes à $\xi(x)$.

On note $TB(\xi, \tau) = \sum_{F \in \tau^2} tb(\partial F)$. Si $[\tau]$ est l’ensemble des triangulations de contact isotopes à τ , on définit alors

$$TB(\xi, [\tau]) = \max_{\tau' \in [\tau]} TB(\xi, \tau').$$

(On a toujours $TB(\xi, \tau') \leq 0$.)

On suppose dorénavant, après un changement éventuel de notation, que $TB(\tau, \xi) = TB(\xi, [\tau])$. Une telle triangulation est dite *maximale* pour ξ dans la classe de τ .

Dans ce cas, on a :

- Lemme 6.12.** (1) *Pour chaque face F de τ , toute composante de Γ_F est un arc dont les extrémités sont sur des arêtes différentes, sauf au plus six arcs qui sont parallèles au bord et dont les extrémités sont “au plus près” des sommets (voir la figure 3).*
- (2) *“L’holonomie” des courbes de séparation autour du bord d’un 3-simplexe B est comme sur la figure 5.*

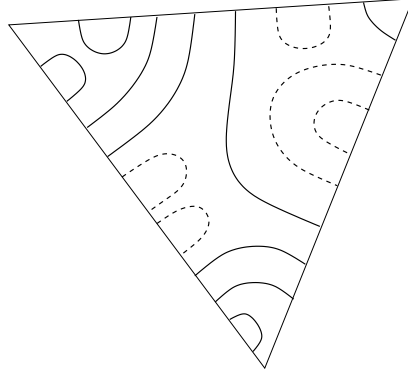


FIGURE 3. La courbe de séparation en pointillés peut être éliminée, reste la partie en gras.

Démonstration. On esquisse seulement la preuve de (a). Les composantes closes de Γ_F sont prohibées car la structure est tendue [Gi1]. L’existence d’une composante parallèle au bord éloignée des sommets impliquerait l’existence d’une rocade ne rencontrant pas les sommets (lemme 2.2). Soit $\alpha \cup \beta$ le bord de cette rocade, $\alpha \subset \partial F$. On isotope l’arête l contenant α en $(l \setminus \alpha) \cup \beta$ (voir figure 4). Cette opération accroît strictement $TB(\xi, \tau)$, contredisant la maximalité.

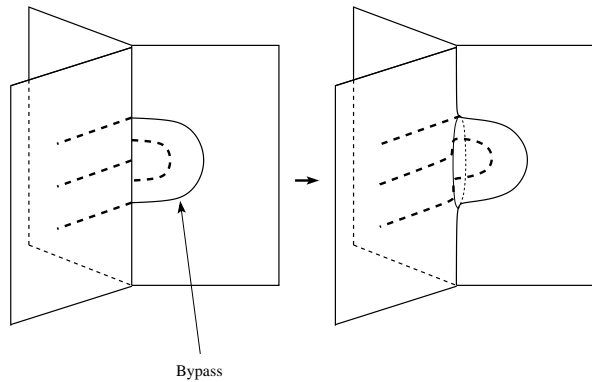


FIGURE 4

La preuve de (b) repose également sur l’existence de rocade dans B , au cas où l’holonomie n’est pas comme sur la figure 5. \square

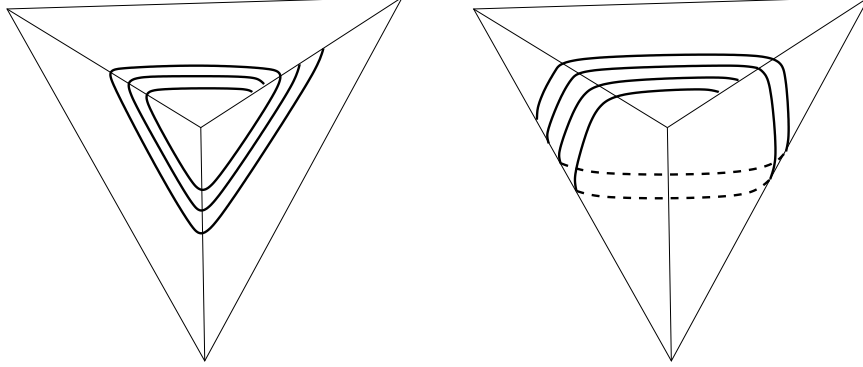


FIGURE 5. L'holonomie, une fois les arêtes lissées. Dans le diagramme de gauche, chaque fois que la courbe de séparation tourne autour du sommet dans le sens trigonométrique, elle s'éloigne de deux crans du sommet.

6.2.3. Prismes fibrés.

Un *prisme fibré* est un polyèdre P difféomorphe à $R \times [-1, 1]$, où R est un triangle ou un rectangle et $\{pt\} \times [-1, 1]$ sont les fibres. L'ensemble $R \times \{-1, 1\}$ est appelé le *bord horizontal* du prisme P et l'ensemble $(\partial R) \times [-1, 1]$ son *bord vertical*.

Soit ξ une structure de contact tendue sur V , telle que τ soit maximale pour ξ . On partitionne les familles d'arcs parallèles de Γ_F (F est une face de τ) à l'intérieur d'une famille de prismes fibrés :

Lemme 6.13. *Pour chaque 3-simplexe B de τ , il existe au plus 5 plongements $\phi_i : P_i \rightarrow B$, $i = 1, \dots, 5$, de prismes fibrés P_i avec les propriétés suivantes.*

- Les arêtes (resp. faces) verticales de P_i sont envoyées dans les arêtes (resp. faces) de B .
- $\phi_i(P_i \setminus \partial P_i \times [-1, 1]) \subset \text{int}(B)$.
- $\phi_i(P_i \times \{-1, 1\}) \cap \Gamma_F = \emptyset$, pour chaque face F de B .
- Les prismes fibrés provenant de deux 3-simplexes différents s'intersectent le long de rectangles.
- Pour chaque face F de B , au plus C composantes de Γ_F ne sont pas contenues dans l'image des ϕ_i . Ici, C est une constante universelle qui ne dépend ni de ξ ni de τ .

De plus, par une combinaison du théorème de flexibilité 2.1 et du théorème 2.3, on peut normaliser $\xi|_{\phi_i(P_i)}$ comme dans le lemme suivant, après une isotopie de ξ . (Pour des raisons de commodité, on ne distingue plus P_i de son image.)

Lemme 6.14. *Soit \mathcal{F} un feuilletage non singulier du bord vertical de chaque prisme (le même, modulo projection verticale, pour chaque face) qui coïncide avec le feuilletage caractéristique près de son 1-squelette. Il existe une isotopie de ξ relative à τ^1 telle que le feuilletage caractéristique devienne \mathcal{F} sur chaque face horizontale et que chaque fibre verticale $\{pt\} \times [-1, 1]$ devienne legendrienne (et les courbes de séparation sont inchangées sur τ^2).*

6.2.4. Constructions des surfaces branchées.

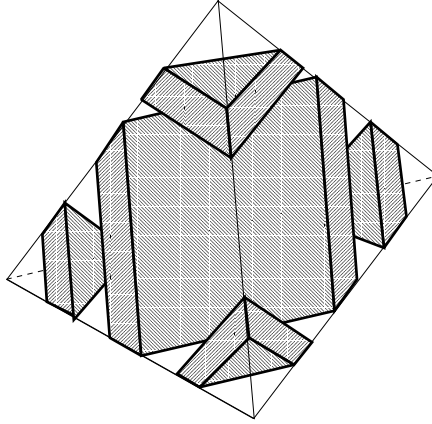


FIGURE 6. Prismes fibrés.

Proposition 6.15. *Il existe un nombre fini de paires $(\mathcal{B}_1, \zeta_1), \dots, (\mathcal{B}_n, \zeta_n)$, où \mathcal{B}_i est une surface branchée et ζ_i une structure de contact sur $V \setminus N(\mathcal{B}_i)$, telles que toute structure de contact tendue ξ sur V soit, à isotopie près, engendrée par une des (\mathcal{B}_i, ζ_i) , i.e.,*

- (1) $\xi|_{V \setminus N(\mathcal{B}_i)} = \zeta_i$;
- (2) $\xi|_{N(\mathcal{B}_i)}$ est tangente aux fibres de $N(\mathcal{B}_i)$.

De plus, les surfaces \mathcal{B}_i ont un bord vide.

Schéma de démonstration. Soit ξ une structure de contact tendue sur V , isotopée de telle manière que τ soit maximale pour ξ . On applique les lemmes 6.13 et 6.14 pour obtenir une collection $\{P_1, \dots, P_k\}$ de prismes fibrés $P_i = R_i \times [-1, 1]$, parmi tous les 3-simplexes B de τ . Pour toute arête $a \in \tau^1$, on note a' l'arc obtenu en retirant à a un petit voisinage de ses extrémités, et $a' \times D^2$ un petit voisinage tubulaire de a' tel que la fibration $a' \times \{pt\}$ soit legendrienne et coïncide avec celle donnée sur chaque prisme P_i .

Lemme 6.16. *Il existe une surface branchée \mathcal{B} à bord ainsi qu'un voisinage $N(\mathcal{B})$ fibré par intervalles legendriens, obtenus par lissage de*

$$K = (\cup_{1 \leq i \leq k} P_i) \cup (\cup_{a \in \tau^1} a' \times D^2).$$

De plus, toute fibre legendrienne de $N(\mathcal{B})$ est incluse dans une fibre legendrienne de K .

Démonstration du lemme 6.16. Quitte à reparamétriser les prismes P_i , on peut supposer que pour $i \neq j$, $Q_i = P_i \times \{0\}$ ne rencontre pas $Q_j = P_j \times \{0\}$. Soit alors $Q'_i = \overline{Q_i \setminus \cup_{a \in \tau^1} (a' \times D^2)}$, i.e. on retire à chaque Q_i un petit voisinage de chacun de ses sommets. Si P_i intersecte P_j , on joint les deux arêtes de Q'_i et Q'_j correspondantes par une petite bande transversale à la fibration. On note \mathcal{B}' la surface branchée à bord formée de l'union des Q'_i et des bandes. La surface \mathcal{B}' n'a aucun point triple.

Pour chaque arête a de τ^1 , on considère alors un disque $\{pt\} \times D^2 \subset a' \times D^2$ et on écrase chaque point de $\partial Q'_i \cap (a' \times D^2)$ sur le point de $\partial(\{pt\} \times D^2)$ situé sur la même fibre. On obtient ainsi une “surface singulière” que l'on perturbe aisément en une surface branchée \mathcal{B} ; ici apparaissent des points triples. Une fois lissés les coins de K , on obtient naturellement un voisinage fibré $N(\mathcal{B})$ de \mathcal{B} qui possède les propriétés requises. \square

La construction du lemme 6.16 donne naissance à un nombre fini de surfaces branchées, car chaque 3-simplexe contient au plus 5 prismes, et pour chaque simplexe, les prismes peuvent prendre 7 positions différentes (voir la figure 6). De plus, deux familles de prismes situés dans deux simplexes adjacents le long d'une face ou d'une arête peuvent s'intersecter d'un nombre fini de façons. Ici, on considère que deux prismes P_i et P_j dans un 3-simplexe B sont équivalents s'il existe une isotopie de P_i à P_j qui se restreint sur chaque arête a en une isotopie de $a \cap P_i$ à $a \cap P_j$ et sur chaque face F en une isotopie de $F \cap P_i$ à $F \cap P_j$. Deux familles de prismes sont équivalentes si on peut isotoper l'une sur l'autre par une famille d'isotopies de prismes qui se restreignent en une isotopie des intersections dans les faces et les arêtes.

On peut supposer que les structures de contact qui donnent le même ensemble de prismes fibrés (et donc la même surface branchée \mathcal{B}) coïncident sur $\partial N(\mathcal{B})$, car on peut imposer le même feuilletage non singulier sur les faces horizontales des prismes par le lemme 6.14. Le complémentaire de $N(\mathcal{B})$ hérite de τ d'une décomposition naturelle en polyèdres. Sur les faces de ces polyèdres situées en dehors de $\partial_h N(\mathcal{B})$, le nombre de composantes de la courbe de séparation est universellement borné d'après le lemme 6.13. Ceci conduit à un nombre fini de configurations possibles pour la courbe de séparation, et donc à un nombre fini de feuilletages caractéristiques modèles sur les bords des polyèdres d'après le théorème de flexibilité 2.1. De surcroît, une structure de contact tendue est déterminée sur chaque polyèdre par le feuilletage caractéristique qu'elle trace au bord d'après le théorème 2.3.

À ce stade, la surface branchée \mathcal{B} construite peut cependant avoir un bord non vide. On utilise alors un *principe d'amputation* pour exciser le bord. Si la face verticale F d'un prisme P est entièrement contenue dans $\partial_v N(\mathcal{B})$, alors toutes les structures de contact qui coïncident hors de $N(\mathcal{B})$ avec une structure ζ donnée et sont tangentes aux fibres de $N(\mathcal{B})$ coïncident sur cette face F . En particulier, elles donnent toutes le même nombre de composantes de courbes de découpage sur F , et le nombre de composantes de courbes de découpage sur les autres faces verticales de P est borné. Toutes les structures de contact qui coïncident avec ζ sur $V \setminus N(\mathcal{B})$, coïncident donc, à isotopie près, avec un nombre fini de modèles sur P , tenant compte du nombre de composantes de courbes de séparation, et de leurs répartitions possibles dans les faces des prismes adjacents. On peut donc amputer $N(\mathcal{B})$ de P , avec comme coût une augmentation éventuelle du nombre de paires (\mathcal{B}_i, ζ_i) . C'est un processus fini qui aboutit à des surfaces branchées sans bord (éventuellement vides). \square

6.2.5. Structures de contact tendues portées par le voisinage fibré d'une surface branchée.

On analyse maintenant les structures de contact *portées* par le voisinage fibré d'une surface branchée, c'est-à-dire qui sont tangentes aux fibres et coïncident avec un modèle fixé au bord.

Soit \mathcal{S} l'ensemble des structures de contact tendues tangentes aux fibres de $N(\mathcal{B})$ (avec un germe fixé le long de $\partial N(\mathcal{B})$). Soient de plus B_1, \dots, B_d les composantes de $\overline{\mathcal{B}} \setminus \overline{L}$ (L est le lieu singulier de \mathcal{B}). Si on fixe $\xi_0 \in \mathcal{S}$, alors pour tout $\xi \in \mathcal{S}$, on peut définir un système de poids w_ξ sur \mathcal{B} : $w_\xi(B_i)$, $i = 1, \dots, d$, est la différence de rotation entre ξ et ξ_0 le long d'une fibre $\pi^{-1}(p)$, où $p \in \text{int}(B_i)$. C'est un ensemble d'entiers qui ne dépend pas du choix de $p \in \text{int}(B_i)$. On note que, contrairement à l'invariant de Thurston-Bennequin relatif, un tour à gauche contribue positivement au poids. Il est facile de vérifier que $\xi \in \mathcal{S}$ est déterminée à isotopie près par son poids $w_\xi = (w_\xi(B_1), \dots, w_\xi(B_d)) \in \mathbb{Z}^d$. De plus, chaque entier $w_\xi(B_i)$

est minoré par la condition de contact, indépendamment de ξ . En amputant les composantes B_i pour lesquelles $w_\xi(B_i)$ est négative, on peut supposer que $w_\xi(B_i)$ est positif pour tout $\xi \in \mathcal{S}$ (cette opération augmente éventuellement le nombre de couples (\mathcal{B}_i, ζ_i)).

À chaque arête lisse A de L , on associe une équation linéaire

$$\phi_A(x_1, \dots, x_d) = x_i - (x_j + x_k) = 0,$$

avec $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$, où B_i, B_j et B_k sont les composantes de $\overline{B \setminus L}$ qui se rencontrent le long de A , et où B_j et B_k branchent dans la direction de B_i . Soit E le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^d des solutions du système $\{\phi_A = 0 \mid \forall \text{ arêtes } A \in L\}$. Chaque poids w_ξ est un élément de $E \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$, où $\mathbb{Z}_{\geq 0}^d = \{(x_1, \dots, x_d) \mid x_i \geq 0 \forall i\}$. On définit un ordre partiel \leq sur \mathbb{Z}^d en posant :

$$(x_1, \dots, x_d) \leq (x'_1, \dots, x'_d) \text{ si } x_i \leq x'_i \text{ pour } i = 1, \dots, d.$$

Il y a seulement un nombre fini d'éléments minimaux dans $E \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ pour \leq ; on les note u_1, \dots, u_p . Ils engendrent le monoïde $E \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$. On a par ailleurs le fait standard suivant :

Lemme 6.17. *Les classes d'isotopies de surfaces portées par $N(\mathcal{B})$ (i.e. transversales aux fibres) sont en bijection avec les éléments de $E \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$.*

Remarque 6.18. Toute surface portée par $N(\mathcal{B})$ est transversale à un champ de plans et est soit un tore, soit une bouteille de Klein.

Soit T_1, \dots, T_p la collection de surfaces portées par $N(\mathcal{B})$ et déterminées par les poids u_1, \dots, u_p . Le lemme suivant, avec la proposition 6.15 impliquent le théorème 6.3. On suppose que toutes les surfaces T_i sont des tores. On a :

Lemme 6.19. *Toute structure de contact $\xi \in \mathcal{S}$ est obtenue par une suite de modifications de Lutz sur les tores T_1, \dots, T_p .*

Démonstration. Pour $\xi \in \mathcal{S}$, on peut écrire $w_\xi = \sum_{1 \leq i \leq p} n_i u_i$, $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. La structure de contact ξ' obtenue par modification de Lutz d'indice n_i de ξ_0 sur T_i est tangente aux fibres de $N(\mathcal{B})$ et à le même poids que ξ . Les structures ξ et ξ' sont donc isotopes relativement à $\partial N(\mathcal{B})$. \square

Remarque 6.20. Si T_i est une bouteille de Klein, on peut la remplacer par le tore $T'_i = \partial N(T_i)$, où $N(T_i)$ est un voisinage tubulaire de T_i . On pose $T'_i = T_i$ si T_i est un tore. L'ensemble \mathcal{S} est alors engendré par des modifications de Lutz le long des tores T'_i , à partir d'un ensemble fini de structures de contact, obtenues à partir de ξ_0 en effectuant éventuellement des modifications de Lutz d'indice $1/2$ le long des tores voisins des bouteilles de Klein.

6.2.6. Finitude isotopique.

La preuve du théorème de finitude isotopique des structures tendues sur les variétés atoroïdales provient d'une étude approfondie des structures de contact tendues portées par le voisinage fibré d'une surface branchée. On utilise la classification des structures de contact tendues sur le tore épais (voir [Gi4, Ho1]) pour construire un procédé qui permet de diminuer les poids. Dans le cas général, on devrait être en mesure de montrer qu'il existe un nombre fini de structures de contact tendues de torsion bornée à isomorphisme près. De

plus, ces techniques s'appliquent au cas des variétés V à bord, pourvu que ∂V ne soit pas un tore et qu'on fixe un feuilletage sur ∂V . On obtient des versions relatives du théorème 6.1. Finalement, on obtient aussi le théorème suivant : étant donnés un entier $n \in \mathbb{Z}$ et un type de nœud \mathcal{K} dans la sphère S^3 munie de sa structure tendue standard, il existe, à isotopie de contact près, un nombre fini de nœuds legendriens dans \mathcal{K} dont l'invariant de Thurston-Bennequin est n .

RÉFÉRENCES

- [Be] D. Bennequin, *Entrelacements et équations de Pfaff*, Astérisque **107-108** (1983), 87–161.
- [Co1] V. Colin, *Chirurgies d'indice 1 et isotopies de sphères dans les variétés de contact tendues*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 324, série 1 (1997) 659–663.
- [Co2] V. Colin, *Sur la stabilité, l'existence et l'unicité des structures de contact en dimension 3*, Thèse de l'Éns Lyon (Octobre 1998), 1–83.
- [Co3] V. Colin, *Recollement de variétés de contact tendues*, Bull. Soc. math. France, **127** (1999), 101–127. Voir aussi le rectificatif, Bull. Soc. math. France, **127** (1999), 623–623.
- [Co4] V. Colin, *Stabilité topologique des structures de contact en dimension 3*, Duke Math. Jour., Vol. **99**, No. 2 (1999), 329–351.
- [Co5] V. Colin, *Sur la torsion des structures de contact tendues*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. **34** (2001), 267–286.
- [Co6] V. Colin, *Chirurgies de Dehn admissibles dans les variétés de contact tendue*, Ann. Inst. Fourier, **51**, 5 (2001), 1419–1435.
- [Co7] V. Colin, *Une infinité de structures de contact tendues sur les variétés toroïdales*, Comm. Math. Helv. **76** (2001), 353–372.
- [Co8] V. Colin, *Structures de contact tendues sur les variétés toroïdales et approximation de feuilletages sans composante de Reeb*, Topology, à paraître.
- [CGH1] V. Colin, E. Giroux et K. Honda, *On the coarse classification of tight contact structures*, Proceedings of the 2001 Georgia International Geometry and Topology Conference, à paraître.
- [CGH2] V. Colin, E. Giroux et K. Honda, *Finitude homotopique et isotopique des structures de contact tendues*, en préparation.
- [El1] Y. Eliashberg, *Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds*, Invent. Math. **98** (1989), 623–637.
- [El2] Y. Eliashberg, *Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work*, Ann. Inst. Fourier **42** (1992), 165–192.
- [El3] Y. Eliashberg, *Filling by holomorphic discs and its applications*, London Math. Soc. Lect. Notes Ser., **151** (1991), 45–67.
- [El4] Y. Eliashberg, *Legendrian and transversal knots in tight contact 3-manifolds*, Topological Methods in Modern Mathematics, Publish or Perish 1993, 171–193.
- [EGH] Y. Eliashberg, A. Givental et H. Hofer, *Introduction to symplectic field theory*, Geom. and Funct. Anal. (2000), Special volume, Part II, 560–673.
- [ET] Y. Eliashberg et W. Thurston, *Confoliations*, University Lecture Series **13**, Amer. Math. Soc., Providence (1998).
- [Et] J. Etnyre, *Tight contact structures on lens spaces*, Commun. in Contemp. Math. **2** (2000), 559–577.
- [EH1] J. Etnyre et K. Honda, *On the nonexistence of tight contact structures*, Ann. of Math (2) **153** (2001), 749–766.
- [EH2] J. Etnyre et K. Honda, *Tight contact structures with no symplectic fillings*, à paraître dans Inventiones.
- [FO] W. Floyd et U. Oertel, *Incompressible surfaces via branched surfaces*, Topology **23** (1984), 117–125.
- [Ga1] D. Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 445–503.
- [Ga2] D. Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds II*, J. Diff. Geom. **26** (1987), 461–478.

- [Ga3] D. Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds III* J. Diff. Geom., **26** (1987), 479–536.
- [Ga4] D. Gabai, *Essential laminations and Kneser normal form*, J. Diff. Geom. **53** (1999), 517–574.
- [Gay] D. Gay, *Symplectic 4-dimensional 2-handles and contact surgery along transverse knots*, Ph. D. de l'Université de Berkeley, 1999.
- [Gi1] E. Giroux, *Convexité en topologie de contact*, Comm. Math. Helv. **66** (1991), 637–677.
- [Gi2] E. Giroux, *Une structure de contact, même tendue, est plus ou moins tordue*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **27** (1994), 697–705.
- [Gi3] E. Giroux, *Une infinité de structures de contact tendues sur une infinité de variétés*, Invent. Math. **135** (1999), 789–802.
- [Gi4] E. Giroux, *Structures de contact en dimension trois et bifurcations des feuilletages de surfaces*, Invent. Math. **141** (2000), 615–689.
- [Gi5] E. Giroux, *Structures de contact sur les variétés fibrées en cercles au-dessus d'une surface*, Comm. Math. Helv. **76** (2001), 218–262.
- [Gi6] E. Giroux, *Structures de contact, livres ouverts, et tresses*, en préparation.
- [Gra] J. Gray, *Some global properties of contact structures*, Ann. of Math. **69** (1959), 421–450.
- [Gro] M. Gromov, *Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math. **82** (1985), 307–347.
- [Ha1] W. Haken, *Theorie der Normalflächen. Ein Isotopiekriterium für den Kreisknoten*, Acta. Math. **105** (1961), 245–375.
- [Ha2] W. Haken, *Some results on surfaces in 3-manifolds*, Studies in Modern Topology, Math. Assoc. Amer., distributed by Prentice Hall (1968), 34–98.
- [He] J. Hempel, *Three manifolds*, An. Math. Stu., Princeton Univ. Press., **86** (1973).
- [Ja] W. Jaco, *Lectures on three manifolds topology*, A.M.S., **43** (1977).
- [Ja-Sh] W. Jaco et P. Shalen, *Seifert fibered spaces in 3-manifolds*, Memoirs of the AMS, **220** (1979).
- [Jo] K. Johansson, *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundary*, Lectures Notes in Math., Vol. **761**, Springer, Berlin 1979.
- [Hof] H. Hofer, *Pseudoholomorphic curves in symplectisations with application to the Weinstein conjecture in dimension three*, Invent. Math. **114** (1993), 515–563.
- [Ho1] K. Honda, *On the classification of tight contact structures I*, Geom. Topol. **4** (2000), 309–368.
- [Ho2] K. Honda, *On the classification of tight contact structures II*, J. Diff. Geom. **55** (2000), 83–143.
- [Ho3] K. Honda, *Gluing tight contact structures*, à paraître dans Duke Math. Jour.
- [HKM1] K. Honda, W. Kazez et G. Matić, *Tight contact structures and taut foliations*, Geom. Topol. **4** (2000), 219–242.
- [HKM2] K. Honda, W. Kazez et G. Matić, *Convex decomposition theory*, Internat. Math. Res. Notices (2002), 55–88.
- [HKM3] K. Honda, W. Kazez et G. Matić, *On a theorem of Gabai-Eliashberg-Thurston*, prépublication.
- [Ka] Y. Kanda, *The classification of tight contact structures on the 3-torus*, Comm. in Anal. and Geom. **5** (1997), 413–438.
- [Kn] H. Kneser, *Geschlossene Flächen in dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Jahres. der Deut. Math.-Verein. **38** (1929), 248–260.
- [KM] P. Kronheimer et T. Mrowka, *Monopoles and contact structures*, Invent. Math. **130** (1997), 209–255.
- [ML1] S. Makar-Limanov, *Morse surgeries of index 0 on tight manifolds*, prépublication 1997.
- [ML2] S. Makar-Limanov, *Tight contact structures on solid tori*, Trans. Amer. Math. Soc., **350** (1998), 1013–1044, CMP 96:16.
- [Ma] J. Martinet, *Formes de contact sur les variétés de dimension 3*, Springer Lect. Notes in Math. **209** (1971), 142–163.
- [Me] C. Meckert, *Forme de contact sur la somme connexe de deux variétés de contact de dimension impaire*, Ann. Inst. Fourier **32** (1982), 251–260.
- [Mi] J. Milnor, *A unique factorisation theorem for 3-manifolds*, Amer. J. Math. **84** (1962), 1–7.
- [Sc] S. Schwartzmann, *Asymptotic cycles*, Ann of Math. **66** 2 (1957), 270–284.
- [Th] W. Thurston, *A norm for the homology of 3-manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. **59** (1986), 99–130.

- [Va] F. Varela, *Sur une propriété de C^0 -stabilité des formes de contact en dimension 3*, C. R. Acad. Sc. Paris **280** (1975), 1225–1227.
- [Wa] F. Waldhausen, *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, Ann. Math. **87** (1968), 56–88.
- [Wi] E. Witten, *Monopoles and four-manifolds*, Math. Res. Lett. **1** (1994), 769–796.

Liste des travaux

- [Co1] *Chirurgies d'indice 1 et isotopies de sphères dans les variétés de contact tendues*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 324, série 1 (1997) 659–663.
- [Co2] *Sur la stabilité, l'existence et l'unicité des structures de contact en dimension 3*, Thèse de l'Éns Lyon (Octobre 1998), 1–83.
- [Co3] *Recollement de variétés de contact tendues*, Bull. Soc. math. France, **127** (1999), 101–127. Voir aussi le rectificatif, Bull. Soc. math. France, **127** (1999), 623–623.
- [Co4] *Stabilité topologique des structures de contact en dimension 3*, Duke Math. Jour., Vol. **99**, No. 2 (1999), 329–351.
- [Co5] *Sur la torsion des structures de contact tendues*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. **34** (2001), 267–286.
- [Co6] *Chirurgies de Dehn admissibles dans les variétés de contact tendues*, Ann. Inst. Fourier, **51**, 5 (2001), 1419–1435.
- [Co7] *Une infinité de structures de contact tendues sur les variétés toroïdales*, Comm. Math. Helv. **76** (2001), 353–372.
- [Co8] *Structures de contact tendues sur les variétés toroïdales et approximation de feuilletages sans composante de Reeb*, Topology, à paraître.
- [CGH1] avec E. Giroux et K. Honda, *On the coarse classification of tight contact structures*, Proceedings of the 2001 Georgia International Geometry and Topology Conference, à paraître.
- [CGH2] avec E. Giroux et K. Honda, *Finitude homotopique et isotopique des structures de contact tendues*, en préparation.

Commentaires. La note [Co1] est un article à part entière ; elle n'a pas fait l'objet d'une publication complémentaire. La thèse [Co2] contient les articles [Co1], [Co3] et [Co4], ainsi qu'une partie de [Co5]. L'acte de colloque [CGH1] est une annonce détaillée de [CGH2] ; il correspond à la section *Finitude homotopique et isotopique* 6.2 de ce texte.

UNIVERSITÉ DE NANTES,
 Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, UMR 6629 du CNRS
 2, rue de la Houssinière, 44322 NANTES
 Adresse électronique : `Vincent.Colin@math.univ-nantes.fr`